# Aula 27- Vetores e Valores Próprios-Mudança de Base e Polinómio Característico

# Correção do TPC 8

Considere em as seguintes bases , a base canónica e os seguintes endomorfismos.

* :3→3 tal que
* :3→3 tal que

1. Determine .

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Passo 1 | = | = | = |
| Passo 2 |  |  |  |
| Passo 3 | = | | |

1. Determine .

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Passo 1 | = | = | = |
| Passo 2 |  |  |  |
| Passo 3 | = | | |

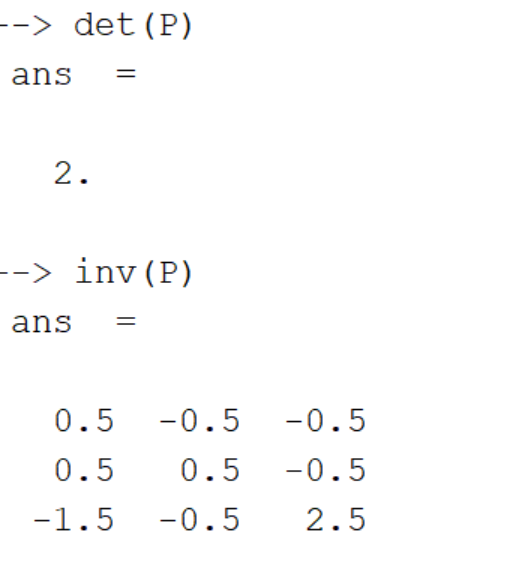
1. Recorrendo ao *Scilab*, mostre que é invertível e determine .

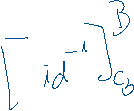
*v1=[2;-1;1];*

*v2=[3;1;2];*

*v3=[1;0;1];*

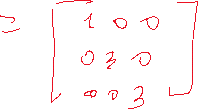
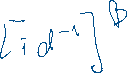
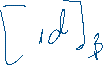
*P=[v1;v2 v3]*



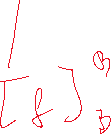
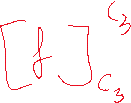


1. Recorrendo ao *Scilab*, determine .

*A=[1 2 2;1 2 -1;-1 1 4]*



|  |  |
| --- | --- |
|  | |
|  |  |



## 6.1. Mudança de base



B

B



Para representar o endomorfismo na base , ficamos com:

.

Considerando , obtém-se:

.

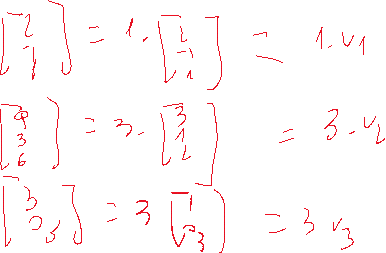
|  |
| --- |
| **Definição:**  Sejam e duas bases de um espaço vetorial de dimensão finita . A matriz é designada por **matriz mudança de base** de para . |

|  |
| --- |
| **Definição:**  Duas matrizes e dizem-se **semelhantes** se existir uma matriz invertível tal que  . |

é semelhante a

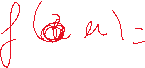
## 6.2. Vetores e valores próprios de um endomorfismo

Seja : 3→ 3 o endomorfismo definido por , base de

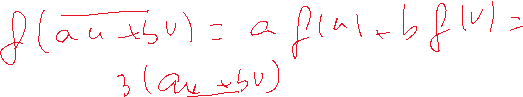


|  |
| --- |
| **Definição:** Seja  um endomorfismo. Diz-se que é um **vetor próprio** de se existir um escalar tal que    * .   Ao escalar  diz-se que é um **valor próprio** **vetor** próprio associado a |

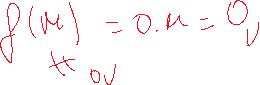
1. Se é vetor próprio associado a então é também vetor próprio associado a .



1. Se são vetores próprios linearmente independentes associados a então também é vetor próprio associado a .



1. Podem existir vetores próprios linearmente independentes associados ao mesmo valor próprio.
2. O escalar pode ser valor próprio de um endomorfismo. Neste caso, qualquer vetor próprio associado a é um elemento do núcleo do endomorfismo considerado. Em particular, o núcleo conterá vectores não nulos e, portanto, o endomorfismo não poderá ser injetivo.



|  |
| --- |
| **Definição:**  Dá-se o nome de ***espectro*** *de*  ao conjunto de todos os valores próprios de. Este conjunto será denotado por |

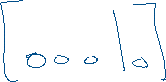
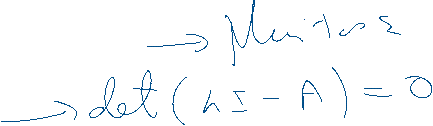
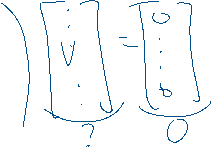
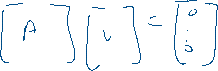
|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

|  |
| --- |
|  |
|  |
|  |

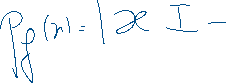








|  |
| --- |
| **Definição:**  Seja uma base de e um endomorfismo de e . O polinómio característico de , é o seguinte determinante: . E denota-se por . |



|  |
| --- |
| **Teorema 2**  Seja um espaço vetorial, um endomorfismo de e seja ∈ . Então, é valor próprio se e só se é raiz do polinómio caraterístico. |

|  |
| --- |
| **Definição**  Seja um endomorfismo. Define-**se *multiplicidade algébrica*** *de um valor próprio*  como sendo a multiplicidade de como raiz do polinómio característico e denota-se por |



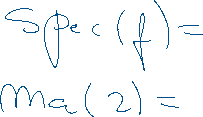
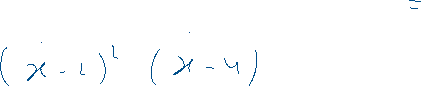
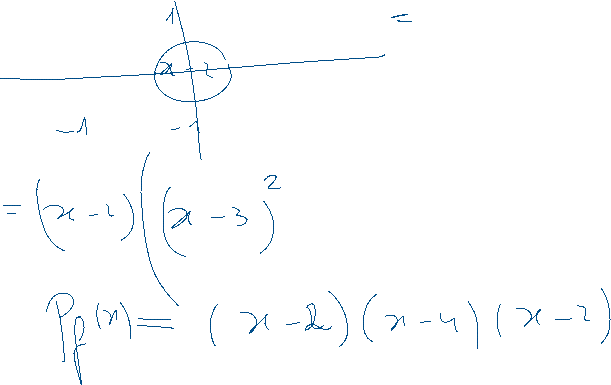
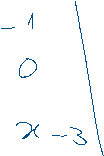
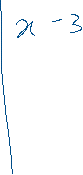
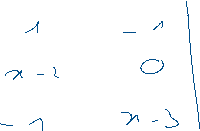
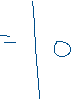
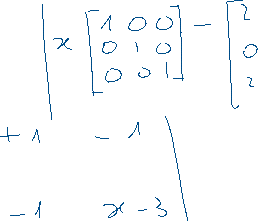
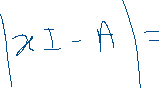
|  |
| --- |
| **Teorema 3**  Sejam e ∈ duas matrizes semelhantes. Então   * e têm o mesmo polinómio característico, i.e.,   .   * e têm os mesmos valores próprios. |

**Exemplo**

Seja 3→3 um endomorfismo e a base canónica de 3. Relativamente à base canónica, é representada pela matriz:

.

Pretende-se determinar o polinómio caraterístico de , o espectro de e a multiplicidade algébrica de cada valor próprio.



# TPC



TPC- 9 Entrega ESI-PL 2-junho alínea a) c) d) e)

**Exercício**

Indique qual o polinómio característico das seguintes aplicações lineares e calcule :

1. O endomorfismo tal que, relativamente à base canónica de , é representado pela matriz .



1. O endomorfismo tal que, relativamente à base canónica de , é representado pela matriz .



1. O endomorfismo , tal que, relativamente à base canónica de , é representado pela matriz



1. O endomorfismo tal que, relativamente à base canónica de , é representado pela matriz .